1. (Obligatorio en cada una de sus partes) (PARTE I)Un sistema P, LIT, con entrada u y salida y, de tiempo continmuo de **segundo orden**, es aquel cuyo modelo E/S es de la forma

$$y = P[u] : \left(\sigma^2 + 2\xi\omega_n\sigma + \omega_n^2\right) y(t) = \omega_n^2 u(t)$$

con una función de transferencia dada por

$$\widehat{h}_P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

en cuyo caso, ξ se denomina relación o cociente de amortiguamiento, y ω_n es la frecuencia natural de P. Los polos del sistema (las raices del polinomio denominador de $\widehat{h}_P(s)$, son

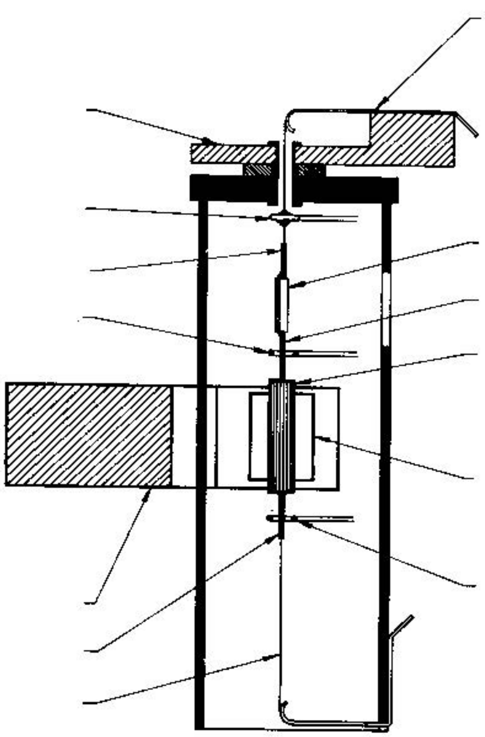
$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

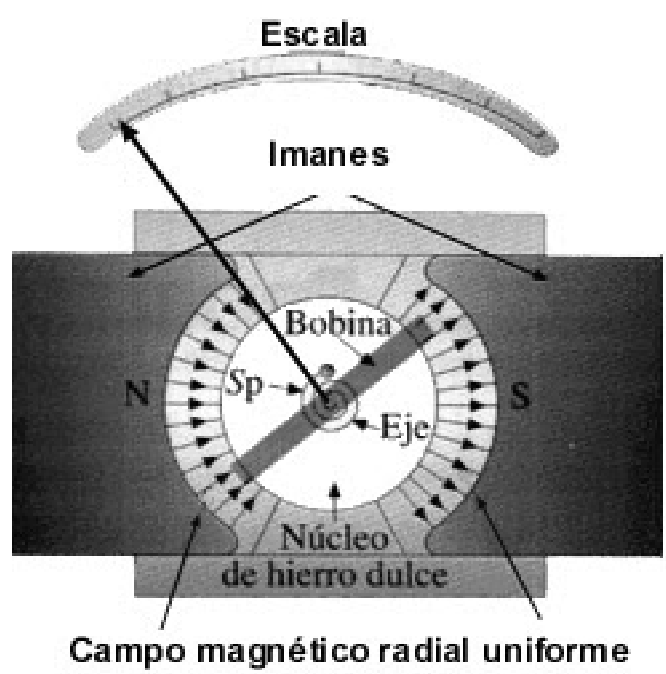
Note que los polos pueden ser:

- reales y distintos, si $\xi > 1$ (Caso: sobreamortiguado)
- reales e iguales, si $\xi = 1$ (Caso: críticamente amortiguado)
- complejos conjugados, si $0 < \xi < 1$ (Caso: subamortiguado).

Motivación: Un ejemplo práctico de este tipo de sistemas es un galvanómetro como se muestra en el documento anexo.

(a) Para el galvanómetro dado: Muestre el modelo real, el modelo fíisico y el modelo matemático empleado. Verifique que su comportamiento dinámico esta descrito por un mdelo externo: Ecuación E/S como la mostrada al comienso, y también determine los parámetros ξ y ω_n





(b) Para $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, demuestre que

$$\left\| \widehat{h}_P \right\|_\infty = M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

también denominado el pico de resonancia del sistema, y que la frecuencia de resonancia, ω_r, a la cual ocurre $\left\| \widehat{h}_P \right\|_\infty$, es

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

(Note: que el pico de resonancia solo depende de ξ).

(c) Demuestre que el ancho de banda del sistema, $\omega_{B,}$ (¿ por qué la llaman frecuencia de 3-dB?) de este sistema P de segundo orden

$$\omega_B = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}}$$

y si $\xi = \sqrt{2}$, entonces $\omega_B = \omega_n$ (Este es el valor, $\xi = 0.707$, que los ingenieros de control tratan de tener siempre en todos sus diseños).

(d) Demuestre que la a transformada de Laplace de la respuesta al escalón, $y_{esc}(t)$, de dicho sistema es

$$\begin{aligned} \widehat{y}_{esc}(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+2\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_n^2\left(1-\xi^2\right)} \end{aligned}$$

(e) Demuestre que si se define como el máximo sobrepico, M_p, de la tespuesta al escalón $y_{esc}(t) = L^{-1}\{\widehat{y}_{esc}(s)\}, t \geq 0$.

$$M_p = \|y_{esc}\|_\infty - y_{esc}^{ss}$$

donde $y_{esc}^{ss} = \lim_{t\to\infty} y_{esc}(t)$ (valor en régimen estacionario o permanente de $y_{esc}(t)$, entonces

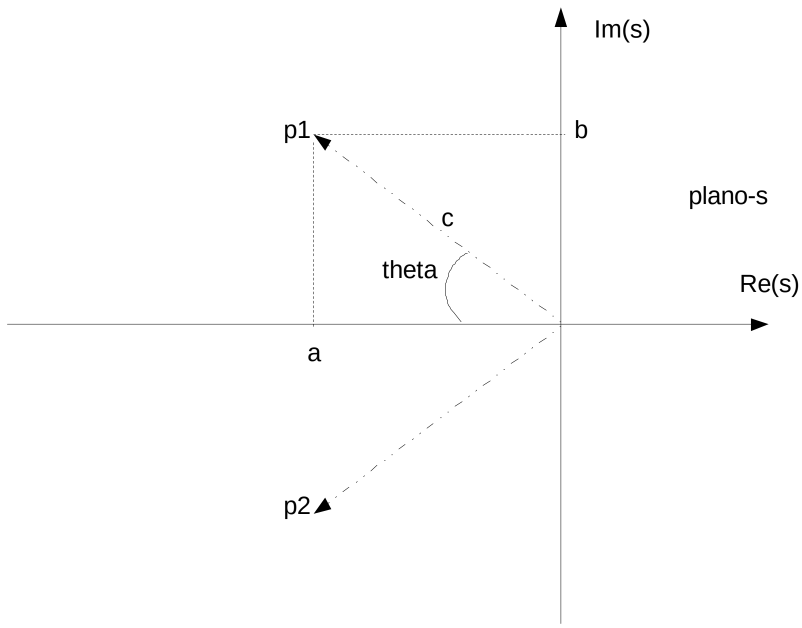
$$M_p\% = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

(sólo depende de ξ al igual que M_r)

(f) El tiempo de asentamiento, T_s, puede determinarse usando la "constante de tiempo" de la envolvente de la respuesta al escalón, $y_{esc}(t)$, si suponemos que (criterio del 2%) la respuesta al escalón decae (o muere) exponencialmente en 4 constantes de tiempo. Encuentre una fórmula para T_s.

(g) Según lo visto, el diagrama de polos y ceros de ese sistema sería el mostrado en la figura (1g)

Determine los valores de a, b, c y theta en términos de ξ, ω_n



(h) Usando las propiedades y las fórmulas de un sistema de segundo orden (use resultados de tareas, libros, internet), discuta el efecto de variar cada uno de los siguienets parémetros:

1.
   - $\eta = \xi\omega_n$
   - $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ = frecuencia de oscilación
   - ω_n = frecuencia natural de oscilación
   - ξ = cociente de amortiguamiento

(uno de ellos varía mientras que los otros tres ermanecen fijos) sobre los parámetros de la respuesta al escalón y_{esc}, como son M_p, T_s, T_p y T_r (donde T_r es el tiempo de "subida" de la respuesta $y_{esc,}que$ se define como el tiempo que tarda y_{esc} de ir desde el 10 hasta el 90% del valor y_{esc}^{ss}) y los parámetros del diagrama de Bode, $h_P(j\omega)$, de la planta P, de alto interés: M_r, ω_b. Por ejemplo: ¿qué sucede con M_p cuando ξ aumenta desde 0 hasta Í?, etc)

(PARTE II)(SCILAB) Para cada una de las siguientes partes, grafique la respuesta al escalón desde $t = 0$ hasta $T = 10$ y los diagramas de Bode desde $\omega = 0.1$ hasta 10 (dos décadas) simultáneamente (una sola gráfica para cada dominio temporal o frecuencial). Los diagramas de magnitud son log vs log, graficados en la mitad superior de la pantalla, y simultaneamente, los diagramas de fase son semi-log, graficados todos simultáneamente en la mitad inferior de la pantalla.Usted deberá entregar en total 12 gráficas con el resultado de 36 "simulaciones" (en realidad se necesitan 27 simulaciones ya que 9 de ellas son repeticiones). Debido al gran número de simulaciones, a usted le conviene escribir un programa con lazos o ciclos "for" para automatizar el proceso de graficación y así ahorrar tiempo.

(a) Para $\omega_d = 1$ rad/seg, obtenga la respuesta al escalón (clásifiquelas de acuerdo a la naturaleza de los polos correspondientes) y los diagramas de Bode cuando $\eta = 0.5$, 1, 5.

(PARTE II)(SCILAB) Para cada una de las siguientes partes, grafique la respuesta al escalón desde $t = 0$ hasta $T = 10$ y los diagramas de Bode desde $\omega = 0.1$ hasta 10 (dos décadas) simultáneamente (una sola gráfica para cada dominio temporal o frecuencial). Los diagramas de magnitud son log vs log, graficados en la mitad superior de la pantalla, y simultaneamente, los diagramas de fase son semi-log, graficados todos simultáneamente en la mitad inferior de la pantalla.Usted deberá entregar en total 12 gráficas con el resultado de 36 "simulaciones" (en realidad se necesitan 27 simulaciones ya que 9 de ellas son repeticiones). Debido al gran número de simulaciones, a usted le conviene escribir un programa con lazos o ciclos "for" para automatizar el proceso de graficación y así ahorrar tiempo.

(a) Para $\omega_d = 1$ rad/seg, obtenga la respuesta al escalón (clásifiquelas de acuerdo a la naturaleza de los polos correspondientes) y los diagramas de Bode cuando $\eta = 0.5,\ 1,\ 5$.

(b) Repita (a) de esta parte para $\eta = 1$ y $\omega_d = 0.5, 1, 5$

(c) Repita (a) para $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ y $\omega_n = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 5\sqrt{2}$

(d) Repita (a) para $\omega_n = \sqrt{2}$ y $theta = \theta = 30, 45, 60$ grados (Recuerde que $\xi = \cos(theta) = \cos(\theta)$)

(e) Usando sus datos y los gr{aficos obtenidos, determine los los seis parámetros y tabule los resultados respectivos. Use la data para concluir cómo afecta la variación de los parámetros sobre las características de las respuesta (aumenta, disminuye o no cambia).

(f) Las siguientes preguntas tienen como objetivo "correlacionar" los parámetros (o características) de la respuesta al escalón con los de la respuesta espectral o frecuencial del sistema P.

1. ¿Qué relación observa usted entre M_r y M_P? ¿Puede establecer usted una relación ´umérica entre los dos parámetros?
2. ¿Qué puede decir sobre T_r y ω_b? ¿rapidez de respuesta y ancho de banda? (Preste atención a $T_r \times \omega_b$)
3. ¡Puede Ud. relacionar ω_n con ω_b? ¿Puede aproximarse el ancho de banda del sstema por ω_n?